Approche pluraliste du développement : l'exemple de la construction du nombre

Jacques Lautrey

Enfance / Volume 2014 / Issue 03 / September 2014, pp 313 - 333
DOI: 10.4074/S0013754514003073, Published online: 03 November 2014

Link to this article: http://www.necplus.eu/abstract_S0013754514003073

How to cite this article:
Jacques Lautrey (2014). Approche pluraliste du développement : l'exemple de la construction du nombre. Enfance, 2014, pp 313-333 doi:10.4074/S0013754514003073

Approche pluraliste du développement : l'exemple de la construction du nombre

Jacques LAUTREY*

RÉSUMÉ

L'approche pluraliste cherche à intégrer dans un même cadre théorique l'explication du développement cognitif et celle de la différenciation entre les individus. Elle s'appuie pour cela sur le fait qu'une même fonction cognitive peut en général être remplie par plusieurs processus, qui traitent des informations différentes. Cette forme de redondance est supposée être à l'origine de deux sortes de relations entre ces processus co-fonctionnels. D'une part des relations de support mutuel, qui sont source d'auto-organisation et donc de développement. D'autre part des relations de vicariance qui sont source de différences de cheminement dans ce développement. Ces hypothèses sont mises à l'épreuve des faits en examinant les données disponibles sur la construction du nombre.

MOTS-CLEFS : DÉVELOPPEMENT COGNITIF, NOMBRE, DIFFÉRENCES INDIVIDUELLES, VICARIANCE, CAUSALITÉ MUTUELLE

ABSTRACT

Pluralistic approach of development : the building of number as an example

The pluralistic approach seeks to integrate within the same theoretical framework the explanation of both cognitive development and differentiation. It relies on the fact that a given function can usually be performed by a plurality of processes dealing with different kinds of information. This form of redundancy is assumed to be at the origin of two kinds of relationships between such co-functional processes. On the one hand, relationships of mutual support, which are source of self-organization and thus of development. On the other hand, relationships of vicariance or substitution, which allow differences of pathway in the course of this developmental process. These assumptions are tested by examining available data on number construction in children.

KEY-WORDS: COGNITIVE DEVELOPMENT, NUMERICAL COGNITION, INDIVIDUAL DIFFERENCES, VICARIANCE, MUTUAL CAUSALITY

*Professeur émérite à l'Université Paris Descartes, 62 rue Vergniaud, 75013 Paris.
Email : jacques.lautrey@parisdescartes.fr

INTRODUCTION

L'approche dite « pluraliste » (Lautrey, 1990, 2003) intègre dans un même cadre théorique l'étude du développement et celle de la différenciation. Les principaux concepts auxquels elle fait appel sont ceux de *redondance*, de *vicariance*, de *variabilité* (intra et interindividuelle) et de *support mutuel*.

La *redondance* est une caractéristique centrale des systèmes vivants et en particulier du système cognitif. Elle tient à ce que, généralement, plusieurs composantes ou processus différents sont susceptibles de remplir une même fonction au sein du système. C'est une propriété du vivant dont Reuchlin (1978) soulignait l'importance dans ces termes :

> Mais ce que l'on sait en biologie et spécialement en physiologie nerveuse permet sans doute de considérer que la vicariance, la redondance et donc d'une certaine façon le gaspillage sont des caractères présents dans toutes les modalités de reproduction et d'adaptation des organismes vivants, comme si les pressions sélectives s'étaient exercées en faveur des organismes mettant en œuvre les processus les plus fiables, même si ces processus sont les plus coûteux. (p. 133)

Un des avantages adaptatifs conférés au système cognitif par la redondance est en effet la fiabilité : son fonctionnement n'est pas affecté par la détérioration d'une de ses composantes lorsqu'une autre, capable de remplir la même fonction, peut s'y substituer. Il s'agit dans ce cas d'une relation de *suppléance*.

Lorsque toutes les composantes du système sont intactes, la redondance donne des degrés de liberté et donc des possibilités de choix. Dans le cas du système cognitif, elle permet de substituer un processus de traitement à un autre en fonction des préférences individuelles, des situations, ou des moments. Il s'agit dans ce cas d'une relation de *vicariance*. Dans l'article dont est extraite la citation ci-dessus, Reuchlin proposait un modèle probabiliste de la vicariance entre processus mentaux. Ce modèle postule qu'il existe, entre les différents processus vicariants disponibles dans le répertoire du sujet, une hiérarchie des probabilités d'activation. Cette hiérarchie n'est toutefois pas nécessairement la même chez tous les individus qui sont confrontés à une même tâche. Il y a là une source de *variabilité interindividuelle* quant à la nature du processus cognitif activé pour réaliser cette tâche. Cette hiérarchie n'est pas non plus nécessairement la même, pour un individu donné, dans toutes les situations ni à tous les moments pour une même tâche. Il y a là une source de *variabilité intra-individuelle.* Dans la mesure où le modèle est probabiliste, une part de cette variabilité est de nature stochastique.

Ce modèle théorique peut être concrétisé en prenant l'exemple des processus en jeu dans la régulation de la posture. Dans un monde régi par les lois de la gravité, sous peine de chute, la régulation de la posture implique une détection correcte de la verticale. Or trois sortes de processus peuvent remplir cette fonction : l'un traite les informations visuelles tirées des verticales présentes dans l'environnement, un autre traite les informations gravitaires issues de l'oreille interne, un troisième exploite les informations proprioceptives, issues des muscles et des tendons, sur la direction de l'axe du corps. En s'appuyant sur le modèle de Reuchlin, Ohlmann (1995) a montré que les relations entre ces trois processus avaient toutes les caractéristiques de la vicariance. La hiérarchie de leurs probabilités d'activation n'est effectivement pas la même chez tous les individus. Certains privilégient, par exemple, les informations en provenance du champ visuel, tandis que d'autres privilégient, par exemple, les informations en provenance de l'oreille interne. Les premiers font des erreurs que ne font pas les seconds lorsqu'ils doivent ajuster à la verticale une barre qui est présentée à l'intérieur d'un cadre incliné. Ils relèvent du style cognitif dit de « dépendance à l'égard du champ » (Witkin & Goodenough, 1981). Les seconds font des erreurs d'ajustement que ne font pas les premiers lorsqu'ils sont placés dans un dispositif centrifugé qui modifie la perception de la verticale fondée sur les informations issues de l'oreille interne. Il s'agit là de différences individuelles relativement stables, correspondant à des styles cognitifs différents. Toutefois ces différences ne peuvent être définies indépendamment de l'environnement car la hiérarchie des probabilités d'activation des différents processus varie aussi en fonction des situations. Lorsque des sujets dépendants du champ visuel sont placés sur une plateforme instable pour effectuer la tâche de la baguette et du cadre, ils ne font plus les erreurs d'ajustement à la verticale. La forte sollicitation des informations gravitaires et proprioceptives que provoque cette situation modifie la hiérarchie des probabilités d'activation et fait passer au second plan le processus de traitement des informations en provenance du champ visuel, y compris chez les sujets dépendants du champ visuel (Ohlmann, 1995).

Comme le montre cet exemple, le modèle de la vicariance proposé par Reuchlin (1978) a exploité la redondance entre processus pour enrichir l'étude de la différenciation entre les individus. À côté des différences de performance, classiquement étudiées par la psychologie différentielle, il a mis l'accent sur les différences qualitatives tenant aux préférences individuelles dans la nature des processus activés face à une situation donnée. Il a par ailleurs relativisé ces différences individuelles en mettant l'accent sur la variabilité intra-individuelle en fonction des situations. On pourra trouver ailleurs d'autres exemples de recherches inspirées par le modèle de la vicariance (Lautrey, 1995, 2002) et un exemple récent d'élargissement de ce concept aux neurosciences (Berthoz, 2013).

Le modèle de la vicariance peut rendre compte des choix qui s'opèrent au sein d'une population de processus ou de stratégies *qui existent déjà* dans le répertoire du sujet, mais il est moins adapté à l'approche développementale du fonctionnement cognitif. Cette dernière doit en effet pouvoir expliquer non seulement comment s'opère le choix entre les processus existants, mais aussi comment apparaissent de nouveaux processus et comment ceux-ci se transforment avec le temps. La thèse qui sera défendue dans ce qui suit est que ce modèle, qui a été utilisé pour expliquer certains aspects de la différenciation entre les individus pourrait, moyennant quelques modifications, expliquer aussi certains aspects du développement. Le changement de point de vue qui permet – selon nous - de l'étendre au développement consiste à examiner sous un nouvel éclairage le concept de redondance. Sous cet éclairage, les processus vicariants ne sont pas redondants. Ou plutôt, ils le sont, mais seulement eu égard à la fonction qu'ils remplissent. Pour reprendre l'exemple mentionné plus haut, les trois processus vicariants qui traitent respectivement les informations en provenance du référentiel visuel, du référentiel gravitaire et du référentiel proprioceptif sont redondants du point de vue de la fonction qu'ils remplissent : détecter la verticale pour lui ajuster la posture. Mais ils ne sont pas redondants quant à la nature des informations qu'ils traitent, visuelles pour l'un, gravitaires pour un autre, proprioceptives pour un troisième. De ce point de vue, il serait plus juste de les dire co-fonctionnels.

C'est sur cette distinction fondamentale que s'appuie l'introduction d'une dimension développementale dans le modèle de la vicariance. Cette extension repose sur l'idée que si les processus co-fonctionnels interagissent, alors chacun peut transmettre à chacun des autres des informations dont ceux-ci ne disposent pas. Lorsque tel est le cas, les conditions sont remplies pour que les relations entre processus co-fonctionnels forment un système dans lequel le fonctionnement de chacun peut informer et transformer chacun des autres. La modélisation des systèmes dynamiques montre qu'un système ayant ces caractéristiques peut être source d'auto-organisation. L'approche des systèmes dynamiques dans la modélisation du développement (Thelen & Smith, 1994 ; van der Maas et Molenaar, 1992 ; van Geert, 2004), accorde une place importante à ces phénomènes d'auto-organisation dans l'évolution développementale. Dans un système dynamique, l'évolution au cours du temps des différentes variables en interaction est formalisée par un système d'équations dans lequel la variation entre le moment t_0 et le moment t_1 de chacune des variables dépend de son état en t_0 mais aussi de l'état en t_0 de chacune des autres variables. Plusieurs sortes d'interaction sont possibles. Celle envisagée plus haut, à propos des échanges d'informations entre processus co-fonctionnels, est la relation de support mutuel ou de causalité mutuelle, particulièrement appropriée pour engendrer une auto-organisation majorante. Un exemple de simulation du développement d'un système formé de cinq composantes sans relation au départ, mais ayant entre elles des relations de support mutuel, peut être trouvé chez van der Maas *et al.* (2006).

L'approche dont les principes généraux viennent d'être présentés est dite *pluraliste* car son point de départ est l'idée que la plupart des fonctions cognitives sont remplies par une *pluralité de processus* vicariants, mais aussi parce que – du fait des degrés de liberté que cela induit dans le fonctionnement du système – celui-ci peut engendrer une *pluralité de cheminements* dans le développement. L'extension du modèle de la vicariance qui vient d'être proposée repose sur un enchaînement d'hypothèses. L'objectif de la partie suivante est de mettre cette construction hypothétique à l'épreuve des faits et c'est l'exemple de la construction du nombre chez l'enfant qui a été choisi pour cela.

APPROCHE PLURALISTE DE LA CONSTRUCTION DU NOMBRE

Si le cadre théorique esquissé plus haut s'applique au cas particulier du développement de la notion de nombre chez l'enfant, on devrait pouvoir montrer qu'il existe bien dans ce domaine :

a) une pluralité de processus dont la fonction commune est la quantification d'objets discrets, mais qui remplissent cette fonction en traitant des informations différentes,
b) des interactions par lesquelles chacun de ces processus informe et transforme chacun des autres,
c) des possibilités de vicariance entre processus co-fonctionnels,
d) une variabilité *interindividuelle* tenant à ce que leur disponibilité varie selon les individus à situation constante,
e) une variabilité *intra-individuelle* tenant à ce que leur disponibilité varie aussi en fonction des situations chez un même individu.

La pluralité des processus

Piaget et Szeminska (1941) faisaient reposer la construction du nombre chez l'enfant sur la synthèse des opérations logiques nécessaires pour en comprendre les deux grandes propriétés : les opérations de sériation (permettant de comprendre les relations d'ordre qui structurent la suite des nombres) et les opérations d'inclusion de classes (permettant de comprendre l'emboîtement des ensembles dont les cardinaux correspondent aux nombres successifs). La réussite de l'épreuve de conservation du nombre était supposée témoigner de la mise en place de la structure logique coordonnant les opérations de sériation et d'inclusion, seule capable de permettre à l'enfant de résister à la suggestion perceptive provoquée par la déformation spatiale d'un des deux ensembles d'objets comparés.

Les recherches ultérieures ont sérieusement compliqué le paysage en mettant en évidence le rôle de plusieurs processus de quantification des objets discrets. Certains sont dits « symboliques » dans la mesure où ils reposent sur le traitement de symboles représentant les objets dénombrés – mots-nombres ou chiffres arabes – d'autres, dits « non symboliques », permettent de quantifier sans recourir à ces symboles.

Les processus non symboliques

On peut classer dans cette catégorie un processus d'estimation approximative des grandes numérosités, un processus de représentation exacte des petites numérosités jusqu'à trois et un processus de mise en correspondance terme à terme de deux ensembles d'objets.

Le processus d'estimation approximative des grandes numérosités

Ce processus entre en jeu dans les situations où le sujet doit estimer, sans compter, lequel de deux ensembles d'objets est le plus nombreux. Le dispositif le plus souvent utilisé pour l'étudier consiste à présenter deux ensembles de points dont les nombres respectifs varient dans des proportions différentes. Avec les bébés, le paradigme expérimental est celui de l'habituation. Une certaine numérosité est d'abord présentée de façon répétitive, par exemple un ensemble de 8 points disposés dans des configurations variées en contrôlant les dimensions continues qui covarient avec la numérosité (par ex. surface cumulée des points, densité). Une fois l'habituation obtenue, le bébé est confronté à une situation test dans laquelle on présente soit cette même numérosité, soit une autre, par exemple 16 points. S'il y a déshabituation lorsque la numérosité change, on considère que le bébé la discrimine de celle à laquelle il a été habitué (Xu & Spelke, 2000). Avec les enfants et les adultes, il s'agit d'indiquer quel est le plus nombreux de deux ensembles de points présentés simultanément, pendant des temps suffisamment courts pour que le comptage soit impossible.

Le processus d'estimation de la numérosité est en place de façon très précoce dans le développement et s'est avéré commun aux humains (bébés, enfants, adultes) et à certains animaux. Il s'agit d'une estimation approximative, bruitée, dont le succès dépend du rapport entre les deux ensembles comparés. À 6 mois les bébés discriminent par exemple 8 de 16, ou 16 de 32, mais pas 8 de 12. À 9 mois, ils peuvent discriminer 8 de 12, ou 16 de 24. On remarquera qu'à chacun des âges, le rapport entre les deux numérosités discriminées est constant. Comme l'indiquent les exemples ci-dessus, il est en moyenne de l'ordre de 1:2 à 6 mois, de 2:3 à 9 mois, et continue de diminuer de façon exponentielle pour se stabiliser aux alentours de 7:8 à l'âge adulte. La constance de ce rapport, à un âge donné, indique que l'estimation de la numérosité varie comme le logarithme du nombre d'objets perçus et obéit donc à la loi de Weber. En d'autres termes, plus le nombre d'objets dans les collections comparées est grand, plus l'écart absolu entre celles-ci doit être important pour qu'elles puissent être discriminées. La métaphore utilisée par Gallistel (1993) pour caractériser l'allure de cette représentation est celle d'une « ligne mentale » orientée de gauche à droite, sur laquelle les positions des numérosités sont de plus en plus bruitées en allant vers la droite. Ajoutons que si « l'acuité » de l'estimation augmente avec l'âge, il existe aussi des différences interindividuelles d'acuité à âge constant dont nous aurons à reparler plus loin.

Les deux signatures principales de l'activation de ce processus sont d'une part la fonction logarithmique décrite plus haut, d'autre part le caractère scalaire[1] de la variabilité des réponses pour une même numérosité (Dehaene, 1997).

Le processus de représentation des petits ensembles (de 1 à 3 objets)

Lui aussi précocement opérationnel, commun aux humains et aux animaux, ce processus a une allure différente du précédent. Il n'obéit pas à la loi de Weber – il permet une discrimination exacte – et n'est pas dissociable des variables

1 La variabilité est scalaire lorsque le coefficient de variation (c'est-à-dire le rapport entre l'écart-type des réponses et leur moyenne) reste constant tout au long de l'étendue des numérosités estimées. Cette caractéristique va de pair avec la fonction logarithmique.

continues associées à la numérosité. L'interprétation généralement admise est qu'il met en œuvre un traitement parallèle des *n* objets de la collection perçue, individualisant la représentation de chacun d'eux en mémoire de travail. Le nombre n'est ici représenté que de façon implicite, par la mise en correspondance de la trace de chacun des éléments représentés avec chacun de ceux perçus dans une autre collection. C'est ainsi qu'une éventuelle discordance entre les deux collections comparées serait détectée.

Spelke considère ces deux systèmes de quantification comme fondateurs (*core systems*) de la construction du nombre chez les humains. Dehaene (1997) ajoute que ce sont eux qui donnent sens aux symboles arbitraires, socialement transmis, que sont les nombres. Une présentation plus complète de ces deux systèmes peut être trouvée dans Feigenson, Dehaene et Spelke (2004).

Dans ce qui suit, pour éviter les dénominations trop longues, le premier sera dénommé « processus d'estimation des numérosités » étant entendu qu'il est approximatif, et le second « processus d'individuation parallèle » étant entendu qu'il est exact et ne porte que sur les nombres de 1 à 3.

La correspondance terme à terme

Avant toute utilisation des symboles numériques, les enfants peuvent juger de l'égalité exacte ou de l'inégalité de collections en faisant se correspondre terme à terme les éléments de l'une et de l'autre. C'est une procédure que Piaget et Szeminska (1941) utilisaient pour avoir l'accord de l'enfant sur l'égalité numérique de deux rangées de jetons avant d'en déformer une pour tester la conservation du nombre. Piaget ne lui accordait cependant pas un rôle important dans la construction du nombre, précisément parce que l'égalité qu'il permet d'établir ne se conserve pas chez les jeunes enfants. Pourtant, lorsque l'enfant devient capable, vers deux ans, d'apparier les éléments de deux collections, il abstrait une relation indépendante de la nature des éléments de chacune, qui lui donne accès à une première forme de la notion d'égalité exacte. C'est ce que montrent les résultats d'une expérience de Mix, Moore et Holcomb (2011), dans laquelle la capacité de jugement d'équivalence numérique d'enfants de 3 ans (évaluée en leur demandant de choisir, parmi deux cartes, celle qui a le même nombre d'objets que la carte cible) s'améliore nettement lorsqu'on leur a fourni auparavant des jouets conçus pour stimuler l'activité de mise en correspondance terme à terme (objets faits de 2 parties qui s'emboîtent).

Les processus symboliques

Ce sont ceux qui s'appuient sur des symboles arbitraires (mots-nombres ou chiffres arabes) pour représenter les quantités exactes d'objets et effectuer directement sur ces symboles les opérations mentales de quantification. À vrai dire les deux premiers des processus envisagés ci-dessous, le *subitizing* et *l'enchaînement des mots-nombres* ne satisfont pas entièrement à cette définition mais le fait qu'ils fassent usage des symboles numériques justifie néanmoins qu'ils soient rangés dans cette section

Le subitizing

C'est une appréhension absolue et rapide des petits nombres d'objets, de 1 à 3, éventuellement 4, qui ressemble beaucoup au processus d'individuation parallèle présenté plus haut et en est probablement le prolongement (Piazza, Fumarola, Chinello, & Melcher, 2011). La différence essentielle est que cette appréhension rapide de la quantité s'accompagne de la verbalisation du mot-nombre correspondant au cardinal de la collection. Cette verbalisation suppose un accès minimal au langage, ce qui explique que le subitizing ne soit guère observé avant l'âge de deux ans. Ce processus n'apporte aucune information sur les propriétés ordinales des nombres, mais peut faciliter l'accès à leurs propriétés cardinales.

L'enchaînement des mots-nombres

Fuson (1988) a particulièrement étudié les étapes développementales de ce processus. Dans un premier temps, les enfants récitent la suite des mots-nombres, dont l'enchaînement leur est appris par leur entourage, un peu comme on récite un chapelet. Cette chaîne verbale forme d'abord un tout non segmenté, déroulé du début à la fin. Lorsqu'elle est par la suite produite en correspondance avec les objets, elle est segmentée en mots-nombres qui n'ont encore en rien la propriété de symboles numériques. Toutefois, dès lors qu'ils sont individualisés, leur ordre d'énonciation peut renseigner sur leur rang et donc sur les propriétés ordinales des nombres.

Le comptage

Il consiste à mettre en correspondance les objets successivement pointés du doigt avec les mots-nombres énoncés dans l'ordre approprié. Il s'agit d'une procédure complexe dont le rôle avait été sous-estimé par Piaget[2], mais réévalué par Gréco (1962) et particulièrement étudié un peu plus tard par Gelman et Gallistel (1978), qui ont dégagé les cinq principes abstraits auxquels obéit le comptage dans sa forme la plus aboutie. Un de ces principes, par exemple, est celui de non-pertinence de l'ordre (le résultat du comptage est le même, quel que soit l'ordre dans lequel les objets sont comptés).

Le *dénombrement* suppose une compréhension minimale du plus tardif de ces cinq principes, celui de cardinalité. Il est acquis lorsque le dernier mot-nombre prononcé est compris comme correspondant à la fois au *numéro* du dernier objet pointé et à la représentation de *la quantité* formée par tous les objets comptés jusqu'à celui-ci. Une des épreuves permettant d'évaluer l'acquisition de ce principe consiste à demander à l'enfant, placé devant un ensemble d'objets, d'en donner N à l'expérimentateur. Le critère crucial est que l'enfant procède pour ce faire à un comptage et, qu'une fois arrivé au mot-nombre correspondant

2 « Il n'est donc pas exagéré de dire que ce facteur verbal ne joue guère de rôle dans le progrès même de la correspondance et de l'équivalence » (Piaget & Szeminska, 1941, p. 75).

à N, et seulement à ce moment-là, il donne à l'expérimentateur l'ensemble des éléments énumérés.

Comprendre en outre que le cardinal d'une collection inclut nécessairement tous les cardinaux des collections de taille inférieure est une étape plus avancée qui demande sans doute la maîtrise des opérations logiques auxquelles Piaget accordait un rôle exclusif.

Les opérations arithmétiques

L'arithmétique exacte est effectuée sur les chiffres arabes. Dans les recherches qui portent sur les débuts de la construction du nombre, les opérations arithmétiques se limitent à de petites additions ou soustractions.

Des présentations plus approfondies des différents processus engagés dans la construction du nombre pourront être trouvées ailleurs (Bideaud, Lehalle, & Villette, 2004 ; Fayol, 2013). L'objectif de la liste non exhaustive présentée ci-dessus a pour seule ambition de montrer que la fonction de quantification des objets discrets peut – elle aussi – être remplie par une pluralité de processus qui traitent des informations de nature différente.

L'interaction entre processus

La question suivante est de savoir s'il existe des interactions entre ces différents processus de quantification des objets discrets, plus précisément des relations de *support mutuel* capables d'engendrer une dynamique développementale. Elle sera abordée à propos des relations entre processus symboliques et non symboliques. Parmi ces derniers, il s'agira du processus d'estimation des numérosités, présenté plus haut, et de celui d'estimation des grandeurs numériques, qui en est dérivé et sera d'abord brièvement présenté ci-dessous.

À partir du moment où les enfants commencent à se familiariser avec les symboles numériques – mots-nombres ou chiffres arabes – ils commencent à les apparier avec une estimation approximative de leur magnitude. La genèse de cet appariement est généralement étudiée en présentant au sujet une ligne bornée à ses deux extrémités, par exemple entre 0 à gauche et 10 à droite, puis en lui demandant d'indiquer la position occupée sur cette ligne par un nombre compris entre 0 et 10. L'analyse des positions attribuées aux différents nombres montre que la « ligne mentale » sur laquelle est représentée la grandeur associée aux nombres présente les mêmes signatures (allure logarithmique et variabilité scalaire) que celle sur laquelle sont représentées les numérosités perçues d'ensembles de points. De surcroît, c'est aussi la même région cérébrale, celle du sillon intrapariétal, qui est activée dans les deux cas. Ces ressemblances suggèrent que la représentation des grandeurs numériques se forme en « recyclant » les réseaux neuronaux antérieurement spécialisés dans l'estimation approximative des numérosités (Nieder & Dehaene, 2009). C'est la raison pour laquelle il a paru intéressant d'envisager les relations des processus symboliques avec l'un et l'autre de ces deux processus non symboliques par lesquels les magnitudes sont représentées de façon analogique.

L'effet des processus non symboliques *sur les processus* symboliques

Effet du processus d'estimation de la numérosité

L'effet de ce processus a d'abord été étudié en cherchant s'il existe une corrélation entre son acuité – c'est-à-dire la plus petite différence que le sujet est capable de discriminer entre deux ensembles de points – et la réussite en mathématiques. Corrélation n'est pas causalité, mais lorsque l'évaluation de cette acuité est nettement antérieure à l'évaluation en mathématiques, l'hypothèse de causalité est plus plausible. C'est le cas dans l'étude de Mazzoco, Feigenson et Halberda (2011) qui évaluent l'acuité dans l'estimation de la numérosité chez 17 enfants de 3 à 6 ans et trouvent une corrélation spécifique avec les performances en calcul deux ans plus tard. C'est aussi le cas de l'étude de Starr, Libertus et Brannon (2013), qui ont évalué cette acuité à 6 mois chez 48 bébés et ont trouvé une corrélation spécifique de 0,30 avec des épreuves de connaissances numériques passées à 3 ans et demi.

L'hypothèse d'une relation causale a aussi été testée par des expériences d'entraînement. Hyde, Khanum et Spelke (2014) montrent que l'entraînement d'enfants du premier degré de l'enseignement primaire (âge moyen de 7 ans environ) à l'estimation des numérosités d'ensembles de points améliore leur temps de réponse et leur exactitude dans la résolution de petits problèmes d'arithmétique. Cet effet est aussi observé chez des adultes (Park et Brannon, 2013)[3].

Effet de l'estimation des grandeurs numériques

Pour des raisons qui s'éclairciront plus loin, la fonction qui relie les valeurs estimées des nombres à leurs valeurs réelles, d'allure logarithmique au départ, se transforme peu à peu en fonction linéaire. Son degré de linéarité est apprécié par la part de variance expliquée par la fonction linéaire.

3 Dans deux études récentes, publiées par une même équipe, les auteurs ne retrouvent pas la relation dont il vient d'être question entre l'épreuve non symbolique de comparaison de numérosités et les performances dans les activités numériques. Dans la première (Sasanguie *et al.*, 2013), qui porte sur des enfants de 6a 6m à 8a 6m, l'épreuve de comparaison de numérosités diffère par plusieurs aspects de celle utilisée dans les études dont il vient d'être question. En particulier, une des deux collections à comparer a toujours la même taille (N = 16) et une majorité des comparaisons porte sur des différences de numérosité relativement faibles pour des enfants de cet âge. Dans la seconde (Sasanguie *et al.*, 2014), qui porte sur des enfants de 5 ans, c'est l'épreuve de connaissances numériques qui est différente. Il s'agit d'une épreuve de comparaison symbolique entre chiffres, alors que dans les études dont il vient d'être question, les connaissances numériques sont évaluées soit par des tests standardisés de connaissances précoces en mathématiques soit par la résolution de problèmes d'addition et de soustraction. La faiblesse de l'effet de distance dans l'épreuve de comparaison de chiffres utilisée dans cette étude (respectivement 89 %, 90 %, 91 % et 95 % de réussite pour les 4 distances croissantes entre les nombres à comparer) fait s'interroger sur le processus à l'œuvre dans la résolution de cette tâche chez les enfants de 5 ans. D'autres études seraient nécessaires pour cerner la signification exacte de ces résultats divergents.

La corrélation entre le degré de linéarité de la ligne mentale numérique et la réussite en mathématiques est de l'ordre de 0,50 à 0,60 selon les expériences et les niveaux scolaires observés (Siegler & Ramani, 2009).

Là encore, les études évaluant l'effet d'un entraînement sont plus décisives pour tester le sens causal de cette relation. Dans l'expérience de Booth et Siegler (2008), les participants - élèves du premier degré de l'enseignement élémentaire (7 ans d'âge moyen) – devaient résoudre des additions. Les deux nombres à additionner étaient présentés sur un écran, au-dessus d'une ligne bornée par le nombre 0 à gauche et le nombre 100 à droite. Ils devaient donner le plus rapidement possible le premier nombre leur venant à l'esprit comme somme des deux addenda présentés. Un feed-back leur était alors donné en affichant le nombre correct correspondant à la somme et en leur demandant de bien s'en souvenir. Deux conditions expérimentales étaient comparées. Dans l'une, seuls les nombres étaient affichés, dans l'autre figurait sous chaque nombre, au moment du feed-back, une barre horizontale dont l'enfant était informé qu'elle représentait la grandeur de chacun de ces nombres. Le pourcentage de réponses correctes rappelées au post-test était plus important dans cette seconde condition et, autre résultat intéressant, les réponses erronées étaient aussi plus proches du résultat correct.

Dans une autre expérience (Siegler & Ramani, 2009) l'entraînement d'enfants d'âge préscolaires (âge moyen 4 ans 8 mois) à la représentation linéaire des grandeurs des nombres s'appuyait sur un dispositif dont le principe s'apparente à celui du jeu de l'oie. La planche comportait 10 cases contenant les nombres de 1 à 10. L'expérimentateur et l'enfant avaient chacun une figurine qu'ils faisaient progresser sur ces cases. Le pas de progression était déterminé par une roue renvoyant, au hasard, la valeur 1 ou la valeur 2. Si la figurine de l'enfant était, par exemple, sur la case 3 et que la roue renvoyait la valeur 2, il devait l'avancer de 2 cases en disant « quatre », « cinq ». Le premier arrivé à 10 avait gagné. Les enfants étaient répartis entre 3 conditions expérimentales. Dans le groupe dit « linéaire » les 10 cases de la planche étaient disposées de façon rectiligne. Dans le groupe dit « circulaire », elles étaient disposées en cercle. Le troisième groupe était entraîné à des activités numériques pendant un temps équivalent. L'amélioration des connaissances numériques entre le pré-test et le post-test s'est avérée plus importante dans le groupe dit « linéaire » que dans chacun des deux autres groupes. L'interprétation des auteurs est que l'efficacité de l'apprentissage est d'autant plus grande que le dispositif de l'apprentissage (à la fois le matériel physique utilisé et les actions physiques et mentales effectuées sur ce matériel) est cognitivement aligné avec la représentation que l'on souhaite induire. La représentation visée étant ici la linéarité de la ligne mentale, la disposition linéaire des cases présente un « alignement cognitif » plus étroit avec elle que la disposition circulaire[4].

4 Le *cognitive alignment framework*, auquel il est fait allusion ici est présenté de façon plus détaillée et étayé de façon plus précise dans un article ultérieur (Laski & Siegler, 2014).

L’effet, en sens inverse, des processus symboliques sur les processus non symboliques

Effet de l’apprentissage de l’arithmétique sur l’estimation des numérosités

Piazza, Pica, Izard, Spelke et Dehaene (2013) ont étudié l’estimation des numérosités dans une population indigène d’Amazonie, les Mundurucùs. Le langage de cette peuplade ne comporte qu’un lexique très restreint de mots-nombres et ils ne disposent pas d’un quelconque système symbolique de traitement des quantités discrètes. Ils peuvent cependant comparer les numérosités de deux ensembles ou estimer leur somme approximative. Quelques écoles ont été implantées depuis quelque temps sur leur vaste territoire mais seuls ceux qui n’en sont pas trop éloignés peuvent les fréquenter. Cette situation a permis aux auteurs de comparer l’acuité de la discrimination des numérosités entre les indigènes qui ont été scolarisés et ceux qui ne l’ont pas été. Les deux groupes comportent des enfants de différents âges et des adultes. Par ailleurs, ceux qui ont été scolarisés l’ont été pendant des durées variables. L’épreuve utilisée pour les comparer est celle de discrimination des numérosités de deux ensembles de points dont il faut décider, sans qu’il soit possible de les compter, lequel est le plus important. Les résultats montrent que chez tous les participants, scolarisés ou non, la fonction qui relie la discrimination à la taille des numérosités comparées a l’allure logarithmique déjà trouvée dans les pays industrialisés. Toutefois, le rapport de Weber est significativement plus réduit – donc l’acuité plus grande – chez les Munducurùs qui ont bénéficié d’un apprentissage de l’arithmétique et d’autant plus grande que le nombre d’années d’apprentissage a été important. En outre, chez ceux qui n’ont pas été scolarisés, la valeur du rapport de Weber plafonne, y compris chez les adultes, au niveau atteint aux environs de 6 ans par les enfants des pays industrialisés, c’est-à-dire l’âge auquel ces derniers commencent l’apprentissage formel de l’arithmétique. Les auteurs en concluent que la baisse rapide du rapport de Weber observée dans la petite enfance est probablement due à la maturation tandis que la baisse exponentielle observée ensuite jusqu’à l’âge adulte est probablement l’effet des apprentissages numériques.

Effet sur l’estimation des grandeurs numériques

Chez les enfants les plus jeunes, la fonction reliant l’estimation approximative de la position des nombres sur un continuum à leurs positions réelles a une allure logarithmique comparable à celle observée lors de l’estimation de la numérosité d’ensembles de points. Les études dans lesquelles l’allure de cette fonction a été comparée pour différents intervalles numériques (0 à 10, 10 à 100, 100 à 1000, etc.) et à différents niveaux scolaires montrent que l’évolution développementale de ce processus est cependant différente de celle du processus d’estimation des numérosités. La fonction logarithmique se transforme ici en fonction linéaire, mais intervalle par intervalle, au fur et à mesure que le niveau scolaire augmente. La Figure 1 donne une vue d’ensemble de ce phénomène (Opfer & Siegler, 2012).

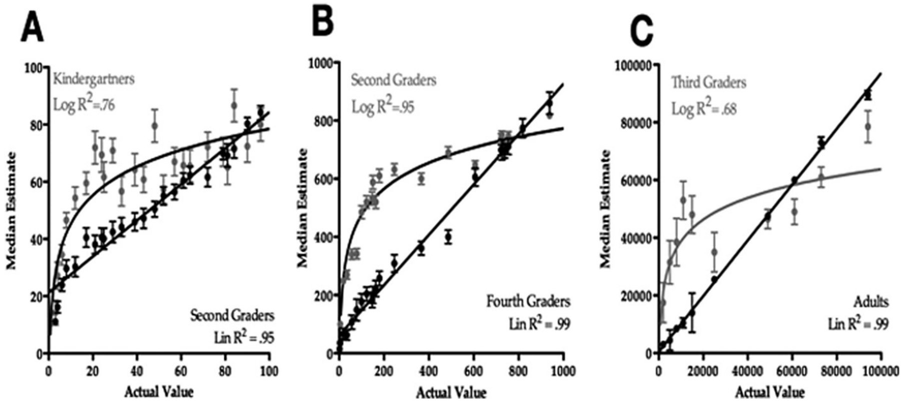

Figure 1.
Fonctions reliant les valeurs estimées aux valeurs réelles des nombres, à différents niveaux scolaires et pour différents intervalles (d'après Opfer & Siegler, 2012, figure 30.2 p. 596)

Les intervalles étudiés sont ceux entre 0 et 100 dans le graphique A, entre 0 et 1 000 dans le graphique B et entre 0 et 100 000 dans le graphique C. Dans les trois graphiques, La position réelle des nombres entre les bornes indiquées figure en abscisse et la position médiane estimée par les participants en ordonnée. Dans chacun des graphiques la fonction reliant les grandeurs estimées aux grandeurs réelles est présentée en haut et en gris pour le moins élevé des deux niveaux scolaires comparés et, en bas et en noir pour le plus élevé. Dans chacun des trois graphiques, l'allure de la première est logarithmique tandis que l'allure de la seconde est linéaire. On peut voir par exemple qu'au deuxième degré, les enfants sont caractérisés par une fonction linéaire dans l'intervalle 0-100 (graphique A), mais restent caractérisés par une fonction logarithmique dans l'intervalle 0-1 000 (graphique B). Le constat est le même pour les autres niveaux scolaires. Par conséquent, le traitement symbolique mis en œuvre dans les apprentissages numériques informe et transforme la représentation non symbolique des grandeurs des nombres mais il le fait d'une manière particulière. L'apprentissage de la règle de succession, qui fait passer de chaque nombre au suivant par itération d'une unité, et dont la conséquence est que tous les intervalles entre nombres successifs sont égaux, n'est pas transféré de façon immédiate à la représentation de l'ensemble des nombres. C'est plus probablement l'expérience acquise par la manipulation des nombres situés dans l'intervalle pratiqué à chaque niveau scolaire qui transforme la représentation analogique des grandeurs de ces nombres là, mais pas encore celle des grandeurs des nombres de plus grande taille. Cette allure très progressive de la généralisation des propriétés acquises sur les petits nombres à des nombres plus grands, avait été déjà observée par Gréco et décrite par Piaget comme « l'arithmétisation progressive de la série » (Piaget, 1960, p. 19).

Vicariance et variabilités

Existe-t-il des possibilités de substitution entre ces différents processus ? Si oui, donnent-elles lieu à une variabilité dans les trajectoires développementales ?

Dans le développement atypique

Le cas le plus extrême est celui où une déficience, d'origine génétique ou accidentelle, fait qu'un de ces processus est absent ou peu efficient. S'il existe des relations de vicariance, un autre parmi ceux qui lui sont co-fonctionnels peut lui suppléer, plus ou moins efficacement.

Les enfants qui présentent le syndrome de Williams, ont un profil de développement particulier dans lequel les aptitudes verbales sont nettement moins atteintes que les aptitudes spatiales. L'acquisition du calcul est retardée. Ansari *et al.* (2003) se sont demandé si la construction du nombre suivait chez eux le même cheminement que chez les enfants dont le développement est typique. Ils se sont en particulier intéressés à l'acquisition du principe de cardinalité qui, dans le développement typique, a lieu entre 3 et 4 ans. Ils ont apparié sur le niveau d'aptitude spatiale, un groupe d'enfants au développement typique ayant l'âge auquel la compréhension de ce principe commence à se mettre en place (âge moyen 3a 6m) et un groupe d'enfants Williams (âge moyen 7a 6m). Les deux groupes avaient par ailleurs passé des épreuves d'aptitude verbale. Le principe de cardinalité s'est avéré être en cours d'acquisition dans les deux groupes, avec des niveaux moyens de performance et des dispersions comparables. L'aspect le plus intéressant des résultats est que dans le groupe d'enfants au développement typique, les différences individuelles dans les scores aux épreuves de cardinalité étaient liées aux différences individuelles d'aptitude spatiale, alors que dans le groupe d'enfants Williams, elles étaient liées aux différences d'aptitude verbale. Ceci suggère que les uns et les autres parviennent au principe de cardinalité par des voies différentes.

L'étude ultérieure de van Herwegen, Ansari, Xu et Karmiloff-Smith (2008) apporte un éclairage sur cette question. Ces auteurs ont fait passer à un groupe de 9 enfants Williams encore dans la petite enfance (âge moyen 35 mois), une épreuve d'estimation approximative des grandes numérosités et une épreuve de discrimination exacte des petites numérosités (individuation parallèle). Ceux-ci ne sont pas parvenus à discriminer les grandes numérosités mais ont été capables de discrimination exacte de petites numérosités (2 de 3). Le rapprochement de ce résultat avec celui de l'étude précédente suggère que la voie par laquelle les enfants Williams examinés par Ansari *et al.* ont pu construire la notion de cardinalité est celle qui s'appuie sur les processus relativement préservés chez eux, à savoir le processus d'individuation parallèle et le langage. Le principe de cardinalité serait découvert sur les nombres de 1 à 3, en particulier en observant que l'on passe de 1 à 2 et de 2 à 3 en ajoutant un élément, puis généralisé pas à pas aux nombres suivants de la chaîne verbale. Le Corre et Carey (2007), ont défendu l'idée que cette voie – en réalité un peu plus complexe que la description qui en est faite ici – est celle qui est suivie par tous les enfants. Les résultats de leurs expériences étayent cette idée et, selon eux, l'appariement des nombres plus grands à la représentation approximative de leur numérosité n'interviendrait qu'une fois leur cardinalité maîtrisée.

Mais pourquoi alors un retard aussi important dans la construction du principe de cardinalité chez les enfants Williams puisqu'ils maîtrisent précisément le traitement des petites numérosités ? L'étude de van Herwegen *et al.* suggère que leur retard pourrait être dû au déficit du processus d'estimation approximative des grandes numérosités. Cette autre interprétation irait dans le sens d'auteurs qui privilégient le rôle de ce dernier processus dans la construction du principe de cardinalité (Dehaene, 1997 ; Piazza, 2010). On trouve aussi des faits qui viennent à l'appui de cette autre interprétation : Wagner et Johnson (2011) montrent que les enfants de 4 ans peuvent apparier des mots-nombres, dont ils ne maîtrisent pas encore la cardinalité exacte, avec des représentations approximatives de leurs magnitudes.

Deux conceptions de l'appariement entre les mots-nombres de la chaîne verbale et leurs grandeurs approximatives s'affrontent donc. Dans l'une c'est la découverte des principes du comptage sur les petits nombres, qui permet ensuite, au fur et à mesure que ces principes sont étendus à des nombres plus grands, d'apparier ces derniers à la représentation approximative de leur grandeur. Dans l'autre au contraire, c'est le processus d'estimation approximative des numérosités, précocement en place, qui guide l'appariement entre les mots-nombres et la cardinalité qui leur correspond. L'une et l'autre sont étayées par des faits convaincants. C'est exactement ce que l'on peut attendre si ces deux processus sont vicariants.

Dans le développement typique

Les différences de cheminement

Lorsque tous les processus présents dans le répertoire sont fonctionnels, l'existence de relations de vicariance laisse attendre des différences individuelles dans la hiérarchie de leurs probabilités d'activation et donc des différences dans l'ordre où sont maîtrisées les différentes composantes de la construction. C'est une question sur laquelle on trouve peu de données dans la littérature sur la construction du nombre. L'étude de Dowker (2008) est à notre connaissance une des rares à en fournir. Des enfants de 4 ans ont passé un ensemble d'épreuves destinées à évaluer leur maîtrise dans quelques-unes des composantes de la construction du nombre : comptage, cardinalité (évaluée avec l'épreuve « donne m'en N »), principe de non-pertinence de l'ordre, addition répétée de 1, soustraction répétée de 1. Un lien significatif mais modéré est trouvé entre les performances dans la plupart de ces composantes, mais aucune ne semble être un prérequis pour les autres. Par exemple, 22 % de ceux qui maîtrisent le comptage ne maîtrisent pas la cardinalité et 41 % de ceux qui se trompent au comptage réussissent l'épreuve de cardinalité (variabilité qui peut être rapprochée de la discussion précédente sur la possible vicariance entre les différents processus pouvant donner accès à la cardinalité).

On trouve aussi quelques études de cas qui laissent apercevoir le champ que la vicariance laisse à la variabilité des cheminements. Brissiaud (1991) rapporte le cas d'un enfant qui a appris à compter en mettant ses doigts en correspondance terme à terme avec les objets et en utilisant la collection-témoin de doigts ainsi constituée comme représentation du nombre. C'est seulement dans un deuxième temps que les mots-nombres ont été acquis chez cet enfant et ont pris sens – du moins au départ – par leur appariement à la représentation analogique de la quantité que constituaient les collections-témoins de doigts.

La variabilité intra-individuelle

Cette seconde forme de variabilité n'a pas non plus suscité beaucoup d'intérêt dans le champ du nombre, sauf chez Siegler (1996) qui en a fait un objet d'étude dans certaines de ses recherches sur le développement des connaissances en arithmétique. En particulier dans une recherche où les stratégies de résolution de petites additions ont été analysées chez des enfants de cinq ans avec une approche microgénétique (Siegler & Jenkins, 1989). Pas moins de huit stratégies différentes ont été identifiées. Cette analyse a montré l'existence d'une forte variabilité interindividuelle – la stratégie de résolution majoritaire n'est pas la même chez tous les enfants – mais aussi d'une forte variabilité intra-individuelle : quelle que soit leur stratégie majoritaire, tous les enfants utilisent aussi, à un moment ou un autre, d'autres stratégies. Leur choix varie parfois en fonction des caractéristiques du problème (par exemple en fonction de la taille des addenda ou de l'ordre dans lequel ceux-ci sont énoncés), parfois en fonction des moments pour un même problème. Cette variabilité intra-individuelle a un rôle important dans l'évolution développementale. Dans l'approche sélectionniste qui est celle de Siegler, elle est considérée comme une condition nécessaire pour que puisse s'exercer le processus de sélection par lequel est progressivement privilégiée la stratégie qui s'avère la plus efficace et la moins coûteuse, pour ce sujet, dans cette catégorie de problèmes, à cet instant de son évolution. Son rôle est également important dans l'élaboration de nouvelles stratégies par combinaison d'éléments issus des stratégies dont la variabilité intra-individuelle a permis l'exploration. Mais la variabilité intra-individuelle est tout aussi importante pour l'approche dynamique du développement, qui considère l'instabilité du système comme une phase nécessaire à sa réorganisation.

DISCUSSION

Il y a donc bien une pluralité de processus qui sont susceptibles de remplir la fonction de quantification d'ensembles d'objets discrets. Ils sont redondants de ce point de vue, mais très différents quant à la nature des informations qu'ils traitent. Certains sont adaptés au traitement des petits nombres, d'autres au traitement des grandes numérosités ; certains évaluent des grandeurs exactes, d'autres des grandeurs approximatives ; certains font ressortir les propriétés ordinales des nombres, d'autres leurs propriétés cardinales ; certains s'appuient sur la perception, d'autres sur l'action ou le langage.

L'identification des différents processus susceptibles d'entrer en jeu dans la construction du nombre a bien avancé. La recherche sur les compétences cognitives du bébé en a considérablement enrichi la palette et a permis d'identifier, parmi ces processus, ceux qui jouent un rôle fondateur. Il y a par contre discussion sur la façon dont ils s'articulent les uns aux autres au cours de cette construction. L'hypothèse privilégiée par l'approche pluraliste est qu'une part de la dynamique développementale repose sur les relations de support mutuel qui peuvent se nouer entre eux. Mais une chose est de modéliser les relations de support mutuel entre N processus abstraits, comme c'est le cas dans la simulation de van der Maas *et al.* (2006), autre chose est de comprendre la forme particulière que peuvent prendre ces interactions entre des processus qui ont chacun leur spécificité et ne sont pas tous opérationnels au même moment. L'exemple qui a été pris dans cet article est celui des relations entre les processus d'estimation approximative d'une part – approximation des numérosités et approximation des grandeurs numériques – et les processus symboliques d'autre part. On trouve bien, dans cet exemple, l'existence d'une forme de causalité mutuelle dans leurs évolutions. Cela n'allait pas de soi. Le processus, très précocement en place, d'estimation des numérosités aurait pu être encapsulé et hermétique aux effets du traitement symbolique. Tel n'est pas le cas, le premier fournit au second une sémantique dont celui-ci est dépourvu tandis que le second fait évoluer l'acuité du premier qui lui-même affine cette sémantique, et ainsi de suite. Reste à savoir si cette forme de causalité mutuelle peut être généralisée aux autres processus en jeu. Si tel est le cas, ils forment tous ensemble un système capable d'auto-organisation, donc de développement.

L'approche pluraliste laisse par ailleurs attendre également, entre les différents processus en jeu des relations de vicariance tenant à ce qu'ils remplissent – bien que de façon différente - la même fonction. Quelques exemples de différences de cheminement compatibles avec l'hypothèse de vicariance ont été donnés plus haut, mais ils sont rares. C'est un aspect de la construction du nombre qui n'a pas suscité beaucoup d'intérêt jusqu'à maintenant. D'autres méthodes seraient nécessaires pour explorer cette question plus avant. Des méthodes qui soient à la fois multidimensionnelles et longitudinales.

À notre connaissance, une seule étude a pour l'instant adopté ce type de méthodologie. Kolkman, Kroesbergen, et Leseman (2013) ont fait une étude longitudinale de 69 enfants examinés à trois reprises, à 4 ans, 5 ans et 6 ans avec un ensemble d'épreuves relatives à la construction du nombre : 2 épreuves non symboliques d'estimation approximative des « numérosités » (*non-symbolic skills*), 2 épreuves d'estimation approximative des « grandeurs numériques » (dénommées *mapping skills* par les auteurs) et deux « épreuves symboliques » (*symbolic skills*). Seuls les enfants de 6 ans, scolarisés en premier degré, passaient en outre une épreuve de connaissances en arithmétique. Une analyse factorielle confirmatoire montre que les trois sortes d'épreuves distinguées plus haut sont saturées par trois facteurs distincts chez les enfants de 4 et 5 ans, mais par un seul facteur commun, baptisé *numerical skills* à 6 ans. Ce dont les auteurs concluent que les trois sortes de processus qu'ils ont évalués sont distinctes à 4 et 5 ans, mais intégrés en un même système à 6 ans.

Ils testent ensuite différents modèles structuraux des relations de dépendance entre ces facteurs d'une occasion de mesure à l'autre. Le modèle le mieux ajusté est un modèle dans lequel ce sont surtout les facteurs dénommés *symbolic skills* et *mapping skills* évalués à 4 ans et 5 ans qui influencent le facteur *numerical skills* à 6 ans, ainsi que la performance au test d'arithmétique. Contrairement à ce qui est trouvé dans la plupart des autres études, le facteur *non-symbolic skills* trouvé à 4 et 5 ans n'a pas d'effet sur les performances en arithmétique évaluées plus tard. Sur ce dernier point, comme en conviennent les auteurs, la faible fidélité de l'épreuve de comparaison de numérosités ne permet cependant pas de considérer ce résultat comme fiable et demande une réplication.

L'intérêt de cette approche méthodologique est de donner les moyens de tester différents modèles possibles de l'évolution développementale des relations entre les différents processus impliqués dans la construction du nombre. Les coefficients de piste qu'elle permet de calculer ne traduisent cependant que l'influence moyenne qu'a un facteur évalué au temps t_n sur un facteur évalué en t_{n+1}. Ils ne permettent pas de distinguer les différents cheminements individuels sous-jacents à cette structure moyenne. Pour aller plus loin dans la compréhension des différentes formes que peut prendre l'interaction entre processus co-fonctionnels, il faut aller plus loin dans l'individualisation des observations. C'est en effet au niveau de l'individu que peut être véritablement observée l'évolution développementale des interactions entre les différents processus qui entrent en jeu dans la construction et c'est seulement dans un second temps que peuvent être regroupés, pour utiliser des méthodes statistiques plus puissantes, les individus suivant un même cheminement. Ces deux sortes d'analyses peuvent être menées de pair et s'éclairer l'une l'autre (Lautrey, 2010). Les informations recueillies ainsi sur les différences de cheminement seraient d'un grand intérêt théorique pour comprendre les différentes formes que peut prendre l'interaction entre processus co-fonctionnels, mais aussi d'un grand intérêt pratique pour adapter l'apprentissage au type de cheminement par lequel l'enfant particulier auquel on s'adresse construit la notion de nombre.

Remerciements

L'auteur remercie Jacqueline Bideaud et Henri Lehalle pour leurs commentaires sur une version précédente de cet article.

RÉFÉRENCES

Ansari, D., Donlan, C.,Thomas, M. S. C., Ewing, S. A., Peen, T., & Karmiloff-Smith, A. (2003). What makes counting count? Verbal and visuo-spatial contributions to typical and atypical number development. *Journal of experimental child development*, *85*, 50-62.

Berthoz, A. (2013). La vicariance – le cerveau créateur de mondes. Paris : Odile Jacob.

Bideaud, J., Lehalle, H., & Villette, B. (2004). *La conquête du nombre et ses chemins chez l'enfant*. Lille : Éditions Septentrion.

Booth, J., & Siegler, R. S. (2008) Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child development*, *79*(4), 1016-1031.

Brissiaud, R. (1991). Un outil pour construire le nombre : les collections-témoins de doigts. In J. Bideaud, C. Meljac, & J.-P. Fischer (Eds.), *Les chemins du nombre* (pp. 59-90). Lille: Presses Universitaires de Lille.

Dehaene, S. (1997). *The number sense*. Oxford: Oxford University Press.

Dowker, A. (2008). Individual differences in numerical abilities in preschoolers. *Developmental science*, *11*(5), 650-654.

Fayol, M. (2013). *L'acquisition du nombre.* Paris; Puf.

Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E.S. (2004). Core systems of number. *Trends in cognitive science*, *8*(7), 307-314.

Fuson, K.-C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New-York: Springer-Verlag.

Gallistel, C. R. (1993). A conceptual framework for the study of numerical estimation and arithmetic reasoning in animals. In S. T. Boysen & E. J. Capaldi (Eds.), *Development of numerical competence: Animal and human models*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The child understanding of number*. Cambridge, MA : Harvard University Press.

Gréco, P. (1962). Quantité et quotité : Nouvelles recherches sur la correspondance terme à terme et la conservation des ensembles. In P. Greco & A. Morf (Eds.), *Structures numériques élémentaires* (pp. 1-70). Paris: Puf.

Hyde, D. C., Khanum, S., & Spelke, E. S. (2014). Brief non-symbolic approximate number practice enhances subsequent exact symbolic arithmetic in children. *Cognition*, *131*, 92-107.

Kolkman, M. E., Kroesbergen, E. H., & Leseman, P. P. M. (2013). Early numerical development and the role of non-symbolic and symbolic skills. *Learning and instruction*, *25*, 95-103.

Laski, E. V., & Siegler, R. S. (2014). Learning from number board games: You learn what you encode. *Developmental psychology*, *50*(3), 853-864.

Lautrey, J. (1990). Esquisse d'un modèle pluraliste du développement cognitif. In M. Reuchlin, J. Lautrey, C. Marendaz, & T. Ohlmann (Eds.), *Cognition: l'universel et l'individuel*. Paris: Puf.

Lautrey, J. (Ed.). (1995). *Universel et différentiel en psychologie*. Paris: Puf.

Lautrey, J. (2002). Le statut de la variabilité entre les individus en psychologie cognitive. In J. Lautrey, B. Mazoyer, & P. van Geert (Eds.), *Invariants et variabilités dans les sciences cognitives* (pp. 103-121). Paris : Presses de la Maison des Sciences de l'Homme.

Lautrey, J. (2003). A pluralistic approach to cognitive differenciation and development. In R. J. Sternberg, J. Lautrey, & T. Lubart (Eds.), *Models of Intelligence: International Perspectives* (pp. 117-131). Washington, DC: American Psychological Press.

Lautrey, J. (2010). L'évolution des spécificités de l'approche différentielle et ses répercussions sur l'identité de la sous-discipline. In A. de Ribaupierre, P.

Ghisletta, T. Lecerf, & J.-L. Roulin (Eds.) *Identités et spécificités de la psychologie différentielle* (pp. 15-29). Presses Universitaires de Rennes.

Le Corre, M., & Carey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more : an investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition*, *106*(2), 395-438.

Mazzocco, M. M. M., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011). Preschoolers precision of the approximate number system predicts later school mathematics performance. *Plos one*, *6*(9), 1-8.

Mix, K. S., Moore, J. A., & Holcomb, E. (2011). One to one play promotes numerical equivalence concepts. *Journal of cognition and development*, *12*(4), 463-480.

Nieder, A., & Dehaene, S. (2009). Representation of number in the brain. *Annual review of neuroscience*, *32*, 185-208.

Ohlmann, T. (1995). Processus vicariants et théorie neutraliste de l'évolution : une nécessaire convergence. In J. Lautrey (Ed.), *Universel et Différentiel en Psychologie* (77-105). Paris : Puf.

Opfer, J., & Siegler, R. S. (2012). Development of quantitative thinking. In K. J. Holyoak, & R. G. Morrison (Eds.), *The Oxford handbook of thinking and reasoning* (pp. 585-605). New-York: Oxford University Press.

Park, J., & Brannon, E. M. (2013). Training the approximate number system improves math proficiency. *Psychological Science*, *24*(10), 2013-2019.

Piaget, J. (1960). Introduction. In P. Gréco, J.-B. Grize, S. Papert, & J. Piaget (Eds.), *Problèmes de la construction du nombre. Études d'épistémologie génétique*, *vol. XI* (pp. 3-68). Paris: Puf.

Piaget, J., & Szeminska, A. (1941). *La genèse du nombre chez l'enfant*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé

Piazza, M. (2010). Neurocognitive start-up tools for symbolic number representation. *Trends in cognitive science*, *14*(12), 542-551.

Piazza, M., Fumarola, A, Chinello, A., & Melcher, D. (2011). Subitizing reflects visuo-spatial object individuation capacity. *Cognition*, *121*, 147-153.

Piazza, M., Pica, P., Izard, V., Spelke, E., & Dehaene, S. (2013). Education enhances the acuity of the nonverbal approximate number system. *Psychological Science*, *24*(6), 1037-1043.

Reuchlin, M. (1978). Processus vicariants et différences individuelles. *Journal de Psychologie*, *2*, 133-145.

Sasanguie, D., Defever, E., Maertens, B., & Reynvoet, B. (2014). The approximate number system is not predictive for symbolic number processing in kindergartners. *The quarterly journal of experimental psychology*, *67*(2), 271-280.

Sasanguie, D., Göbel, S.M., Moll, K., Smets, K., & Reynvoet, B. (2013). Approximate number sense, symbolic number processing, or number-space mappings: What underlies mathematics achievement? *Journal of experimental child psychology*, *114*, 418-431.

Siegler, R. S. (1996). *Emerging minds*. NewYork: Oxford University Press.

Siegler, R. S., & Jenkins, E. (1989). *How children discover new strategies*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Siegler, R. S., & Ramani, G. B. (2009). Playing linear number board games—but not circular ones—improve low-income preschoolers numerical understanding. *Journal of educational psychology*, *101*(3), 545-560.

Starr, A., Libertus, M. E., & Brannon, E. (2013). Number sense in infancy predicts mathematical abilities in childhood. *PNAS*, *110*(45), 18116-18120.

Thelen, E., & Smith, L. B. (1994). *A dynamic systems approach to the development of cognition and action*. Cambridge, Ma, US: MIT Press.

van der Maas, H. L. J., Dolan, C. V., Grasman, R. P. P., Wicherts, J. M., Huizenga, H. M., & Raijmakers, M. E. J. (2006). A dynamical model of general intelligence: The positive manifold of intelligence by mutualism. *Psychological review*, *113*(4), 842-861.

van der Maas, H. L., & Molenaar, P. C. (1992). Stagewise cognitive development: An application of catastroph theory. *Psychological review*, *99*, 395-417.

van Geert (2004). Dynamic modeling of cognitive development: time, situatedness and variability. In A. Demetriou & Raftopoulos, A. (Eds.), *Cognitive developmental change: Theories, models and measurement*. New-York, NY, US: Cambridge University Press.

van Herwegen, J., Ansari, D., Xu, F., & Karmiloff-Smith, A. (2008). Small and large number processing in infants and toddlers with Williams syndrome. *Developmental science*, *11*(5), 637-643.

Wagner, J. B., & Johnson, S. C. (2011). An association between understanding cardinality and analog magnitude representations in preschoolers. *Cognition*, *119*, 10-22.

Witkin, H. A., & Goodenough, D. R. (1981). *Cognitive styles: essence and origins*. New-York: International Universities Press.

Xu, F., & Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6- month old infants. *Cognition*, *74*, B1-B11.